МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для самостійної роботи за темою

"Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії”

з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей
заочної та прискореної форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 2 від 17.05.19 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2019

Методичні вказівки для самостійної роботи з курсу «Вища математика» за темою «Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії» для студентів технічних спеціальностей заочної та прискореної форм навчання / уклад. Г.Б. Лінник, І.О. Морачковська. – Харків : НТУ «ХПІ». – 31 с.

Укладачі: Г.Б. Лінник, І.О. Морачковська

Рецензент доц. С.М. Решетнікова

Кафедра прикладної математики

Методичні вказівки відповідають навчальним (робочим) програмам з дисципліни “Вища математика” ННІ МІТ. Їх мета допомогти студентам заочної та прискореної форм навчання у розв’язанні задач за темою «Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії».

У роботі викладено у мінімально необхідному обсязі базові теоретичні відомості. Також розібрані зразки виконання всіх індивідуальних завдань, а також наведено по 30 варіантів індивідуальних завдань.

1. Матриці та системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Матриця – це таблиця чисел, яка складена з m рядків та n стовпців. Якщо $m=n$, то матриця квадратна, та їй відповідає число – її визначник. Позначимо матрицю A, тоді її визначник – $|A|$; кількість рядків чи стовпців ($m=n$) матриці A – це порядок її визначника.

Правило обчислення визначника 2-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Правило обчислення визначника 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Як було вказано раніше, матриця – це таблиця чисел, яка складена з m рядків та n стовпців; її розмір $m\times n$. Матриця розміру $1\times n$ – матриця-рядок; розміру $m\times 1$ – матриця-стовпець. Матриця, всі елементи якої дорівнюють 0, зветься нульовою та позначається 0.

Елементи a_{ii} квадратної матриці A створюють її головну діагональ. Якщо елементи, розташовані по один бік від головної діагоналі квадратної матриці, дорівнюють 0, матриця зветься трикутною; якщо тільки елементи головної діагоналі відрізняються від 0 – діагональною. Діагональна матриця, елементи головної діагоналі якої дорівнюють 1, зветься одиничною; її позначають I, E або I_n, якщо треба вказати її розмірність.

Матриці рівні $A=B$, якщо вони однакового розміру та $a_{ik} = b_{ik}$. Транспонування матриці – це операція, зміст якої у тому, що її рядки заміщуються стовпцями, а стовпці рядками. Позначення: A^T. Множення матриці на число визначається як множення на це число кожного елемента матриці; додавання – як додавання відповідних елементів, тобто може бути виконано тільки з матрицями однакового розміру.

Множення матриць можливо у випадку, коли розмір першого множника $m \times n$, другого – $n \times p$. Добуток матриць $AB=C$, де елементи c_{ik} матриці C знаходяться за схемою: i-й рядок матриці A множимо на k-й стовпець матриці B.

Оберненою до матриці A називається матриця A^{-1}, така, що $A^{-1}A=AA^{-1}=I$. A^{-1} існує, якщо A – квадратна та її визначник $|A| \neq 0$. Алгоритм знаходження A^{-1}: побудуємо матрицю S алгебраїчних доповнень елементів матриці A, де алгебраїчне доповнення елемента a_{ik} знаходиться як добуток $(-1)^{i+k}$ та визначника матриці, яка залишиться від матриці A, якщо з неї викреслити і-й рядок та k-й стовпець. Його позначення: A_{ik}. Далі матрицю S слід транспонувати. $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}S^T$.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Введення матриці коефіцієнтів системи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

матриць-стовпців X – невідомих та B – вільних членів рівнянь системи:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

дає можливість запису СЛАР у вигляді матричного рівняння: $AX=B$. Якщо $m=n$ та $|A| \neq 0$, то розв'язок цього рівняння $X=A^{-1}B$. Такий метод знаходження розв'язку є матричним методом розв'язання СЛАР.

Також можна розв'язувати систему методом Крамера: $x_i = \dfrac{\Delta i}{\Delta}$, $i = \overline{1,n}$. Δ – визначник матриці системи, Δi – визначник, якій одержимо з Δ заміною *i*–го стовпця стовпцем вільних членів.

У загальному випадку СЛАР може мати єдиний розв'язок, або нескінченну множину розв'язків, або не мати жодного розв'язку (несумісна СЛАР). Метод Гауса дозволяє разом провести дослідження та розв'язання СЛАР. Він заснований на понятті еквівалентних СЛАР, тобто таких, що мають однакові множини розв'язків. Еквівалентні перетворення, що створюють еквівалентні вихідним СЛАР, це: перестановка рівнянь, множення рівняння на число $c \neq 0$, додавання рівнянь. Зручніше працювати з розширеною матрицею системи $\tilde{A}$, яка виникає, якщо до матриці системи A дописати стовпець вільних членів B:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Перетворення виконується з рядками матриці $\tilde{A}$, причому матриця A має бути перетворена у верхньотрикутну (класичний метод Гауса) або одиничну (метод Гауса-Жордана). Послідовно: додаємо перший рядок, помножений на відповідні числа, до інших, так, щоб перший стовпець набув необхідного вигляду; потім застосовуємо цей алгоритм для другого рядка і т.д. Якщо СЛАР має єдиний розв'язок, то матриця A при застосуванні методу Гауса-Жордана перетворюється на одиничну; замість стовпця B з'являється розв'язок. У загальному випадку потрібно знайти ранги матриць A та $\tilde{A}$. Рангом матриці є кількість ненульових рядків в трикутній формі матриці. Якщо ранги цих матриць співпадають, то система сумісна (має розв'язки), інакше несумісна (не має розв'язків).

Зразок виконання індивідуального завдання:

Дано матриці A та B. Потрібно:

1) обчислити матриці $C = B^T \cdot B, D = B \cdot B^T$;

2) знайти матрицю A^{-1}. Зробити перевірку.

3) записати матричне рівняння $AX = B$, де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, у вигляді системи лінійних рівнянь;

4) розв'язати систему за допомогою оберненої матриці.

5) розв'язати систему методом Крамера.

6) розв'язати систему методом Гауса.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання:

1) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1 + 4 + 9) = (14)_{1\times1};$

$$D = B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{3\times3}.$$

В першому випадку ми одержали матрицю розміру 1×1, в другому 3×3.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix};$

її визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 6;$$

$6 \neq 0$, отже знайдемо A^{-1}:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=9;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=14;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-3;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=3;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=2.$$

Таким чином, ми одержали

$$S=\begin{pmatrix}1 & 9 & 14\\ 1 & -3 & -4\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix};\quad S^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 9 & -3 & 3\\ 14 & -4 & 2\end{pmatrix};\quad A^{-1}=\frac{1}{6}S^T.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 9 & -3 & 3\\ 14 & -4 & 2\end{pmatrix}$$ – обернена матриця.

Зробимо перевірку:

$$A^{-1}A=\frac{1}{6}S^TA=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 9 & -3 & 3\\ 14 & -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\cdot 1+1\cdot 4+1\cdot 1 & 0 & 0\\ 9\cdot 1+(-3)\cdot 4+3\cdot 1 & 6 & 0\\ 14\cdot 1+(-4)\cdot 4+2\cdot 1 & 0 & 6\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}=I,$$

тобто матрицю A^{-1} знайдено вірно.

3) Матричне рівняння:

$$\begin{cases}x-y+z=1,\\ 4x-2y+z=2,\\ x+3y-2z=3.\end{cases}$$

4) Розв’яжемо систему за допомогою оберненої матриці

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 9 & -3 & 3\\ 14 & -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}.$$

5) Розв’яжемо систему методом Крамера

По-перше, знайдемо визначник матриці системи:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Оскільки визначник не дорівнює 0, можна розв’язати систему методом Крамера. Далі обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 6; \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12; \;\; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12;$$

Розв’язок системи: $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{6}{6} = 1,\; y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{12}{6} = 2,\; z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{12}{6} = 2.$

б) Розв’яжемо за допомогою методу Гауса-Жордана ту ж саму СЛАР, що була розв’язана раніше. Маємо:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

На першому кроці перший рядок помножили на –4 та додали до другого – кожен з чотирьох елементів до відповідного. Далі така ж сама процедура з множенням першого рядка на –1 та доданням до третього.

На другому кроці другий рядок, з множенням відповідно на $\frac{1}{2}$ та на –2, його додали до першого та третього рядків. Наприкінці подібним чином досягли появи нулів у третьому стовпці, за допомогою третього рядка. Перші три стовпці утворюють одиничну матрицю, тому у четвертому – розв’язок СЛАР: $x=1,\; y=2,\; z=2$.

2. Векторна алгебра

Вектор $\vec{a}$ – це відрізок, на якому заданий напрям. Довжина цього відрізка – його модуль $|\vec{a}|$. Орт $\vec{a}^0$ – це вектор того ж самого напряму, що й $\vec{a}$, довжина якого дорівнює 1.

Проекція $\vec{a}$ на напрям $\vec{b}$ – це число $Пр_{\vec{b}}\vec{a}$, що дорівнює довжині складової $\vec{a}$ у напрямі $\vec{b}$, зі знаком "+", якщо вона має напрям $\vec{b}$, та зі знаком "–", якщо вона має протилежний напрям $Пр_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, де φ – кут між $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Декартовими координатами вектора $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ є його проекції на осі координат, тому вони можуть бути знайдені як різниці відповідних координат точок кінця та початку $\vec{a}$. Запис $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ є рівносильним до запису $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти координатних осів. Лінійні операції над векторами: додавання, множення на число виконуються над координатами векторів. Два вектори колінеарні, якщо при перенесенні до одного початку вони належать одній прямій. Умови колінеарності $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Скалярний добуток двох векторів – це число $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, де φ – кут між $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Маємо $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|Пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|Пр_{\vec{b}}\vec{a}$.

Вираз через координати співмножників $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$.

Модуль вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Координати $\vec{a}^0$ – напрямляючи косинуси $\vec{a}$, тобто косинуси кутів, що $\vec{a}$ створює з координатними осями. Умова ортогональності (перпендикулярності) $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$$

Векторний добуток 2-х векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – це вектор $\vec{a}\times\vec{b}$, який є перпендикулярним обом співмножникам, утворює з ними так звану праву трійку, та $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$. Вираз через координати співмножників:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Геометричний зміст: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ дорівнює площі паралелограма, сторони якого – вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Змішаний добуток 3-х векторів – це число $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Вираз через координати співмножників:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Геометричний зміст: $\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, ребра якого – вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Три вектори компланарні, якщо при перенесенні до одного початку вони належать одній площині. Умова компланарності: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$.

Зразок виконання індивідуального завдання: знайти 1) довжину ребра *AB* піраміди *ABCD*, 2) напрямляючи косинуси $\overrightarrow{AB}$, 3) кут φ між ребрами *AB* та *AC*, 4) $Пр_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$, 5) площу грані ABC, 6) об'єм піраміди, якщо координати вершин піраміди *A*(-4,1,3), *B*(-1,0,1), *C*(3,-1,1), *D*(2,6,-2).

Розв'язання:

1) Координати вектора $\overrightarrow{AB}=\{-1-(-4);0-1;1-3\}=\{3;-1;-2\}$.

Його довжина $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$.

2) Напрямляючи косинуси $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\dfrac{-1}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\dfrac{-2}{\sqrt{14}}$.

3) $\overrightarrow{AC}=\{7,-2,-2\}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{57}$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\cdot7+(-1)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2)=27$. Таким чином

$$\cos\varphi=\frac{27}{\sqrt{14}\sqrt{57}},\ \varphi=\arccos\frac{27}{\sqrt{14}\sqrt{57}}\approx17^0.$$

4) $Пр_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{27}{\sqrt{57}}$.

5) Площа S трикутника ABC – це половина площі паралелограма, сторони якого – вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, тому $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Знайдемо

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 7 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left((-1)\cdot(-2) - (-2)\cdot(-2)\right) - \vec{j}\left(3\cdot(-2) - 7\cdot(-2)\right) + \vec{k}\left(3\cdot(-2) - 7\cdot(-1)\right)$$

$$= -2\vec{i} - 8\vec{j} + \vec{k}.$$

Тому маємо $S = \frac{1}{2}\sqrt{69}$.

6) Об’єм V піраміди $ABCD$ дорівнює шостій частині об’єму паралелепіпеда, ребра якого – вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$, тобто $V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|$.

Знайдемо

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 7 & -2 & -2 \\ 6 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -57.$$

Таким чином, об’єм піраміди $ABCD$: $V = \frac{57}{6}$.

3. Лінії на площині

Рівняння лінії на площині має вигляд $F(x,y)=0$. Якщо $F(x,y)$ – поліном першої степені (лінійне рівняння), то лінія – пряма; якщо поліном другої степені, то крива 2-го порядку. Перетворення декартових координат дозволяє переходити від загального рівняння до одного з канонічних рівнянь 2-го порядку.

3.1. Пряма

Загальне рівняння прямої має вигляд:

$$Ax + By + C = 0.$$

$\vec{N} = \{A,B\}$ – її нормальний (перпендикулярний до прямої) вектор. Задання нормального вектору $\vec{N} = \{A,B\}$ та точки $M_0(x_0;y_0)$, що належить до прямої, дозволяє одержати рівняння прямої у вигляді:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$

де $\vec{q} = \{m, n\}$ – направляючий вектор прямої, точка $M_0(x_0; y_0)$ належить до прямої. Знання $\vec{q} = \{m, n\}$ та точки $M_0(x_0; y_0)$ дозволяє одержати також параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0. \end{cases}$$

Якщо відомі координати точок M_1, M_2, що належать до прямої, вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ може бути застосованим для запису канонічних чи параметричних рівнянь як направляючий вектор прямої, наприклад $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$, де $k = tg\alpha$; α – кут нахилу прямої до вісі OX. Або $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Кут між двома прямими знаходиться як кут між їх нормальними векторами, або як кут між їх направляючими векторами. Знаходження кута між векторами було розглянуто раніше. Кут φ між двома прямими, що задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами k_1 та k_2, знаходиться за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2},$$

тому умова перпендикулярності цих прямих має вигляд: $k_1 k_2 = -1$. Умова паралельності: $k_1 = k_2$.

Зразок виконання індивідуального завдання: знайти 1) рівняння сторони *AB*, 2) рівняння висоти *CH*, 3) рівняння медіани *AM*, 4) кут *BAC* трикутника, 5) рівняння прямої, яка проходить через центр ваги трикутника паралельно стороні *BC*, якщо координати вершин трикутника *A*(1;3), *B*(-1;0), *C*(2;-2).

Розв’язання:

1) Координати вектора $\overrightarrow{AB} = \{-1-1; 0-3\} = \{-2; -3\}$. Канонічне рівняння прямої *AB*: $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-3}{-3}$; $3(x-1) = 2(y-3)$; $3x-2y+3=0$.

2) Висота *CH* перпендикулярна прямої *AB*, тому $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

$k_{AB} = \dfrac{3}{2}$; $k_{CH} = \dfrac{-1}{3/2} = -\dfrac{2}{3}$.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$y+2 = -\dfrac{2}{3}(x-2)$; $3y+6+2x-4=0$; $2x+3y+2=0$.

Отже одержали рівняння *CH*.

3) Знайдемо середину відрізка *BC*: $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}; \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

$M\left(\dfrac{-1+2}{2}; \dfrac{0-2}{2}\right)$; $M\left(\dfrac{1}{2}; -1\right)$. Напишемо рівняння прямої, яка проходить через дві відомі точки:

$\dfrac{x-1}{1/2-1} = \dfrac{y-3}{-1-3}$; $4(x-1) = \dfrac{1}{2}(y-3)$; $4x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{5}{2} = 0$.

Одержали рівняння медіани *AM*.

4) $k_{AC} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{3+2}{1-2} = -5$, $\quad tg\varphi = \dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2} = \dfrac{3/2+5}{1+(-5)\cdot 3/2} = -1$.

Кут *BAC* трикутника $\varphi = |\mathrm{arctg}(-1)| = \dfrac{\pi}{4}$.

5) Рівняння прямої, яка проходить через центр ваги трикутника паралельно стороні *BC*. Спочатку знайдемо координати центра ваги трикутника:

$O\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}; \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ або $O\left(\dfrac{1-1+2}{3}; \dfrac{3+0-2}{3}\right)$ або $O\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

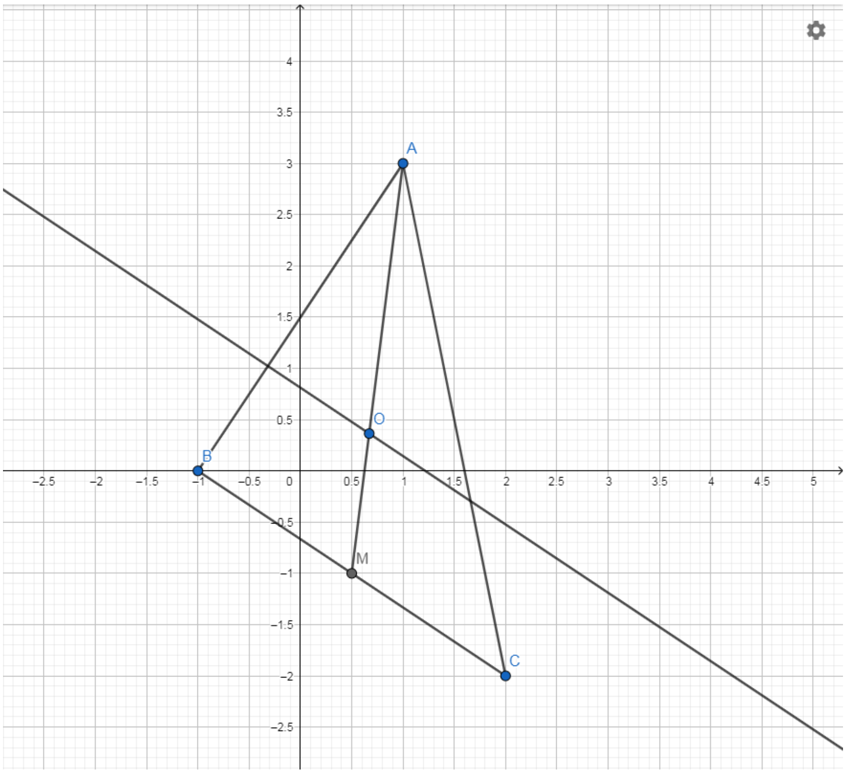
Кутовий коефіцієнт: $k_{BC} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{0+2}{-1-2} = -\dfrac{2}{3}$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$y - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{2}{3}\right)$; $3y - 1 + 2x - \dfrac{4}{3} = 0$; $2x+3y-\dfrac{7}{3} = 0$.

Отже одержали рівняння шуканої прямої.

На рисунку зображено усі вказані точки та прямі.



3.2. Криві 2-го порядку

Еліпс, зображений на рис.1, має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де a – довжина більшої пів осі еліпсу, b – довжина меншої.

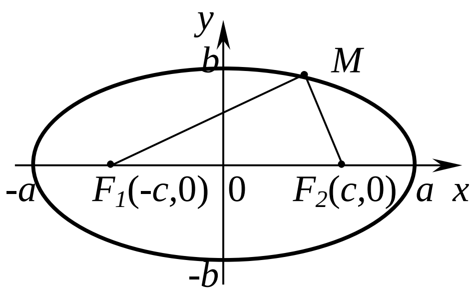


Рис. 1

Гіпербола, зображена на рис. 2, має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де a та b позначені на рисунку; a та b – так звані піввісі гіперболи.

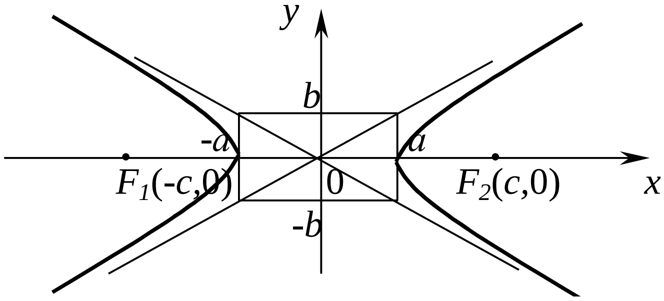


Рис. 2

Прямі $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$ створюють так званий основний прямокутник, продовження діагоналей якого є асимптотами гіперболи $y = \pm\dfrac{b}{a}x$. Якщо у рівнянні гіперболи замість 1, як вище, стоятиме -1, зображення гіперболи повернеться на прямий кут, та таку гіперболу зовуть спряженою.

Парабола, зображена на рис. 3, має канонічне рівняння $y^2 = 2px$, де $p>0$. Точка О – вершина параболи, вісь ОX – її вісь симетрії. Парабола в якої $p<0$ буде повернута у протилежну сторону. Якщо у цих рівняннях поміняти x та y місцями, одержимо параболи, що розташовані вздовж осі ОY.

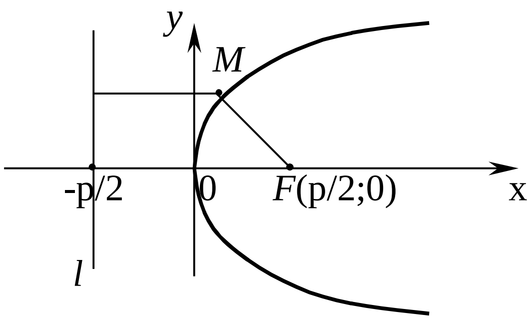


Рис. 3

Щодо перетворення координат, розглянемо тільки випадок, якщо у рівнянні кривої 2-го порядку відсутній добуток xy. У цьому випадку приведення рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду здійснюється за допомогою паралельного переносу координат, формули якого $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{y} = y - y_0$.

Вісі $\tilde{O}\tilde{X}, \tilde{O}\tilde{Y}$ паралельні до осей ОX, ОY; начало нової системи координат точка $\tilde{O}$ має координати $x = x_0$, $y = y_0$. У загальному рівнянні кривої 2-го порядку виділяємо вирази $(x - x_0)^2$ та $(y - y_0)^2$, якщо рівняння містить x^2 та y^2; у разі відсутності одного з квадратів відповідний вираз необхідно виділити у першій степені. Після чого виконується заміна змінних; у системі координат $\tilde{X}\tilde{Y}$ рівняння кривої стає канонічним.

Зразок виконання індивідуального завдання: привести рівняння 2-го порядку до канонічного вигляду, вказати тип кривої та схематично побудувати її.

а) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$.

Розв'язання: коефіцієнти при x^2 та y^2 виносимо за дужки:

$$16\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) + 25\left(y^2 - 4y + 4 - 4\right) - 284 = 0.$$

У дужках ми додавали числа, які потрібні для того, щоб одержати повні квадрати, тобто вирази вигляду $(x - x_0)^2$ та $(y - y_0)^2$, та віднімали ті ж самі числа. Далі маємо:

$$16(x+1)^2 - 16 + 25(y-2)^2 - 100 - 284 = 0,$$

$$16(x+1)^2 + 25(y-2)^2 = 400.$$

Поділимо останнє рівняння на 400:

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1.$$

Рівняння стане канонічним у разі переходу до нових координат: $\tilde{x} = x + 1, \quad \tilde{y} = y - 2$. Воно матиме вигляд:

$$\frac{\tilde{x}^2}{25} + \frac{\tilde{y}^2}{16} = 1.$$

Ми одержали рівняння еліпсу з півосями $a = 5$, $b = 4$ та центром у точці $\tilde{0}(-1, 2)$; він схематично зображений на рис. 4.

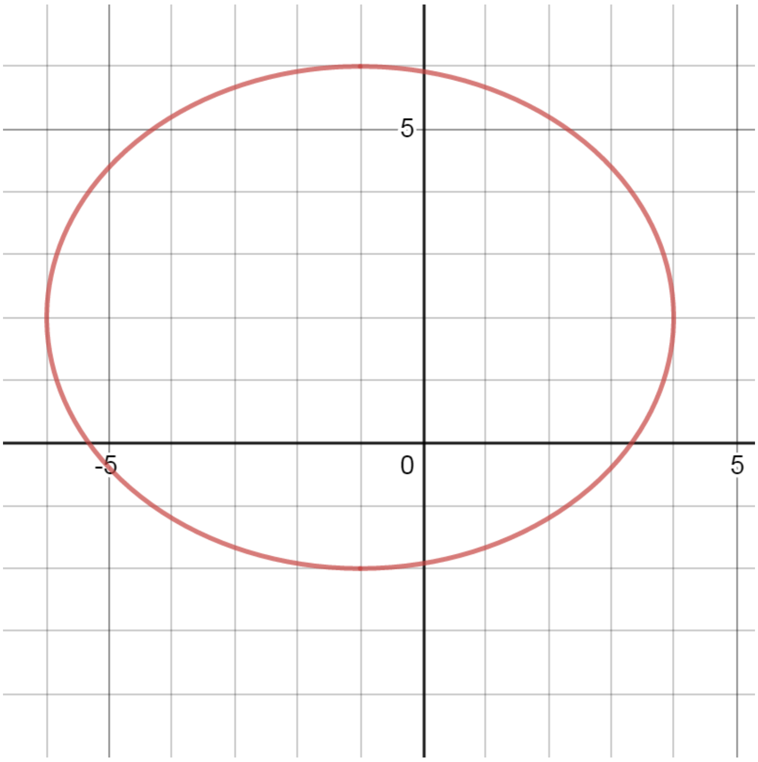


Рис. 4.

б) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$.

Розв’язання: проведемо перетворення рівняння методом, аналогічним до того, що й у попередньому прикладі:

$9\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) - 25\left(y^2 + 4y + 4 - 4\right) - 316 = 0$,

$9(x - 1)^2 - 9 - 25(y + 2)^2 + 100 - 316 = 0$,

$9(x - 1)^2 - 25(y + 2)^2 = 225$.

$\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$.

Далі введемо $\tilde{x} = x - 1, \quad \tilde{y} = y + 2$. Одержимо:

$$\frac{\tilde{x}^2}{25} - \frac{\tilde{y}^2}{9} = 1$$

– рівняння гіперболи з півосями $a = 5$, $b = 3$ та центром у точці $\tilde{O}(1, -2)$, яка схематично зображена на рис. 5.

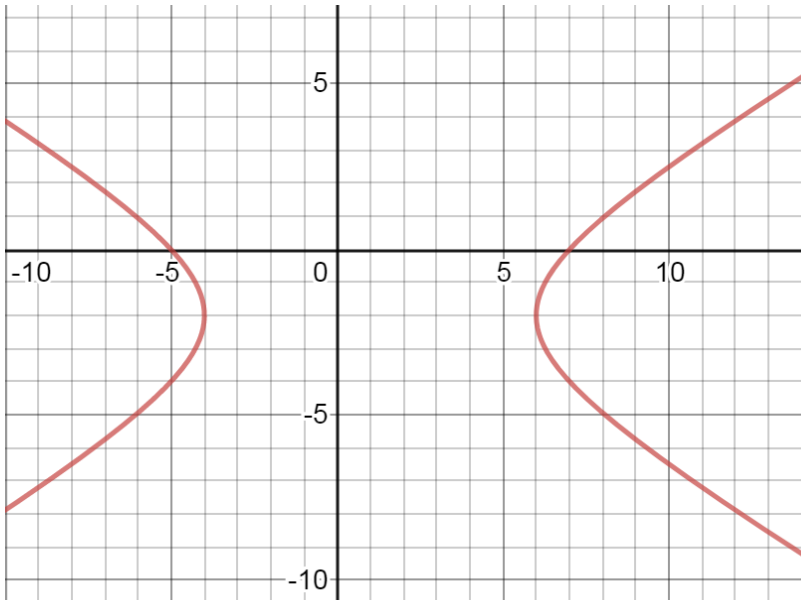


Рис. 5.

в) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$.

Розв’язання: аналогічно попереднім прикладам:

$\left(y^2 - 2y + 1 - 1\right) - 10x - 19 = 0$, $(y - 1)^2 = 10x + 20$, $(y - 1)^2 = 10(x + 2)$.

З введенням $\tilde{x} = x + 2,\ \ \tilde{y} = y - 1$ одержимо $\tilde{y}^2 = 10\tilde{x}$ – рівняння параболи, вершина якої $\tilde{O}(-2,1)$, вісь паралельна до осі *0X*. Графік параболи зображено на рис. 6.

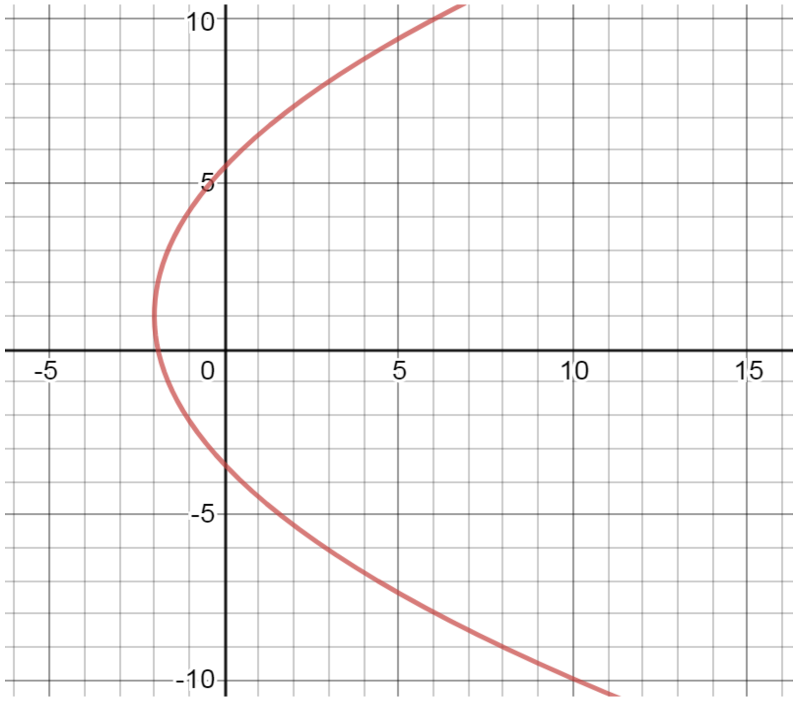


Рис. 6.

4. Площина та пряма у просторі

Загальне рівняння площини має вигляд:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

$\vec{N} = \{A, B, C\}$ – її нормальний (перпендикулярний до площини) вектор. Задання нормального вектора $\vec{N} = \{A, B, C\}$ та точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, що належить до площини, дозволяє одержати рівняння площини у вигляді:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Якщо відомі координати точок $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, що належать до площини, її рівняння може бути знайдено за формулою:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Основний спосіб задання прямої у просторі – її канонічні рівняння

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

де $\vec{q} = \{m, n, p\}$ – направляючий вектор прямої, точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ належить прямої. Знання $\vec{q} = \{m, n, p\}$ та точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ дозволяє одержати також параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0. \end{cases}$$

Якщо відомі координати точок M_1, M_2, що належать до прямої, вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ може бути застосовано для запису канонічних рівнянь як направляючий вектор прямої.

Кут між двома площинами знаходиться як кут між їх нормальними векторами; між двома прямими – як кут між їх направляючими векторами. Позначимо через φ кут між прямою та площиною, через ψ – кут між відповідними векторами $\vec{q}$ та $\vec{N}$; легко побачити, що $\sin\varphi = |\cos\psi|$. Знаходження кута між векторами було розглянуто раніше.

Для знаходження точки перетину між прямою та площиною підставимо вираз *x, y, z* через *t* з параметричних рівнянь прямої до загального рівняння площини з метою знаходження того значення *t*, при якому точка прямої є точкою площини. Знайдене значення *t* залишається підставити до параметричних рівнянь прямої, щоб одержати координати точки перетину.

Зразок виконання індивідуального завдання: в умовах завдання з векторної алгебри маємо координати вершин піраміди *A*(-4,1,3), *B*(-1,0,1), *C*(3,-1,1), *D*(2,6,-2). Потрібно записати 1) рівняння прямої (*AD*), 2) площини *ABC* та висоти (*DH*); 3) знайти кут між прямою (*AD*) та площиною *ABC*; 4) знайти проекцію точки *B* на пряму (*AD*).

Розв'язання:

1) $\overrightarrow{AD}=\{6,5,-5\}$ – направляючий вектор прямої *(AD)*; застосуємо координати точки *A* для запису канонічних рівнянь прямої.

$$(AD):\frac{x+4}{6}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-3}{-5}.$$

2) Рівняння площини ABC:

$$\begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z-3 \\ -1+4 & 0-1 & 1-3 \\ 3+4 & -1-1 & 1-3 \end{vmatrix}=0.$$

Після розкриття визначнику та приведення подібних одержимо загальне рівняння

$$-2x-8y+z-3=0.$$

$\vec{N}=\{-2,-8,1\}$ нормальний вектор площини *ABC*; для висоти (*DH*) він є направляючим. Рівняння висоти (*DH*):

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y-6}{-8}=\frac{z+2}{1}.$$

3) Позначимо через φ кут між прямою (*AD*) та площиною *ABC*, тоді маємо

$$\sin\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{AD}\cdot\vec{N}\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\vec{N}\right|}=\frac{|-12-40-5|}{\sqrt{36+25+25}\sqrt{4+64+1}}=\frac{57}{\sqrt{86}\sqrt{69}}.$$

$$\varphi = \arcsin \frac{57}{\sqrt{86}\sqrt{69}} = 48^0 .$$

4) Проекція точки B на пряму (AD) може бути знайдена як точка B' перетину прямої (AD) та площини, що проведена через точку B перпендикулярно до прямої (AD). Застосовуючи вектор $\overrightarrow{AD}$ як нормальний, одержимо рівняння цієї площини:

$$6(x+1)+5y-5(z-1)=0,$$

$$6x+5y-5z+11=0.$$

Далі напишемо параметричні рівняння прямої (AD)

$$\begin{cases} x = 6t - 4, \\ y = 5t + 1, \\ z = -5t + 3, \end{cases}$$

та підставимо вирази x, y, z з них до рівняння площини:

$$6(6t-4)+5(5t+1)-5(-5t+3)+11=0,$$

$$86t-23=0,\ t=\frac{23}{86}.$$

Залишається обчислити значення координат точки B':

$$x_{B'} = 6\cdot\frac{23}{86} - 4 = -\frac{103}{43},$$

$$y_{B'} = 5\cdot\frac{23}{86} + 1 = \frac{201}{86},$$

$$z_{B'} = -5\cdot\frac{23}{86} + 3 = \frac{143}{86}.$$

Шукана проекція $\left(-\frac{103}{43};\frac{201}{86};\frac{143}{86}\right)$.

Індивідуальні завдання

I. Матриці та системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Дано матриці A та B. Потрібно:

1) обчислити матриці $C = B^T \cdot B, D = B \cdot B^T$;

2) знайти матрицю A^{-1}. Зробити перевірку.

3) записати матричне рівняння $AX = B$, де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, у вигляді системи лінійних рівнянь;

4) розв’язати систему за допомогою оберненої матриці.

5) розв’язати систему методом Крамера.

6) розв’язати систему методом Гаусса.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \\ 10 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$.

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$.

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$.

14. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & -6 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 16. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix} 7 & -5 & -6 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$. 18. $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$. 20. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -6 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 22. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. 24. $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 26. $A=\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix} 0 & -5 & 6 \\ 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. 28. $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}$. 30. $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

II. Векторна алгебра. Знайти довжину ребра *AB* піраміди *ABCD*, направляючий косинуси ребра *AB*, $\text{Пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$, кут φ між ребрами *AB* та *AC*, площу *ABC*, об'єм піраміди, якщо координати вершин піраміди:

1. *A* (-3,6,-1), *B* (2,-5,2), *C* (3,5,1), *D* (0,0,1).
2. *A* (1,0,4), *B* (0,-3,4), *C* (4,6,0), *D* (0,6,-4).

3. A (3,2,0), B (2,-4,3), C (2,0,6), D (2,5,-1).

4. A (-2,3,5), B (5,-6,3), C (3,5,6), D (-6,1,2).

5. A (0,-2,-1), B (4,0,0), C (2,5,1), D (1,2,5).

6. A (-1,1,1), B (-1,2,4), C (2,0,6), D (-2,5,-1).

7. A (0,5,0), B (2,3,-4), C (0,0,-6), D (-3,1,-1).

8. A (0,0,-6), B (4,0,-4), C (1,3,-1), D (4,-1,-3).

9. A (-5,6,-1), B (6,-5,2), C (6,5,1), D (0,0,2).

10. A (6,0,4), B (0,6,4), C (4,6,0), D (0,-6,-4).

11. A (3,2,4), B (2,4,3), C (2,0,6), D (-2,5,-1).

12. A (6,3,5), B (5,-6,3), C (3,5,6), D (-6,-1,2).

13. A (5,-2,-1), B (4,0,0), C (2,5,1), D (1,2,5).

14. A (4,2,5), B (3,0,4), C (0,0,3), D (5,-2,-4).

15. A (4,2,5), B (0,7,1), C (0,2,7), D (1,5,0).

16. A (4,4,10), B (7,10,2), C (2,8,4), D (9,6,9).

17. A (4,6,5), B (6,9,4), C (2,10,10), D (7,5,9).

18. A (3,5,4), B (8,7,4), C (2,10,6), D (4,7,8).

19. A (10,6,6), B (-2,8,2), C (6,8,9), D (7,10,3).

20. A (1,8,2), B (5,2,6), C (5,7,4), D (4,10,9).

21. A (6,6,5), B (4,9,5), C (4,6,11), D (6,9,3).

22. A (8,6,4), B (10,5,5), C (5,6,8), D (8,10,7).

23. A (7,7,3), B (6,5,8), C (3,5,8), D (8,4,-1).

24. A (1,1,1), B (4,-4,4), C (3,5,5), D (2,4,7).

25. A (7,2,2), B (5,7,7), C (5,3,1), D (2,3,7).

26. A (-4,2,5), B (0,-7,1), C (0,2,7), D (1,5,0).

27. A (3,4,10), B (7,0,2), C (-2,8,4), D (9,-6,9).

28. A (4,-6,5), B (6,9,-4), C (2,10,0), D (7,5,9).

29. A (2,5,4), B (8,7,4), C (2,10,6), D (4,7,-8).

30. A (0,6,6), B (-2,8,2), C (6,8,9), D (7,0,3).

III. Пряма у площині.

Знайти 1) рівняння сторони AB, 2) рівняння висоти CH, 3) рівняння медіани AM, 4) кут BAC трикутника, 5) рівняння прямої, яка проходить через центр ваги трикутника паралельно стороні BC, якщо координати вершин трикутника задано

1. A (2,0), B (2,-4), C (2,0).
2. A (-2,5), B (-6,3), C (3,5).
3. A (0,-1), B (4,0), C (1,5).
4. A (-1,1), B (-1,2), C (-2,5).
5. A (0,5), B (2,-4), C (-3,-1).
6. A (0,-6), B (4,0), C (-1,-3).
7. A (7,3), B (6,5), C (3,8).
8. A (1,1), B (4,-4), C (3,5).
9. A (7,2), B (5,7), C (3,1).
10. A (-4,2), B (0,-7), C (0,7).
11. A (3,4), B (0,2), C (-2,4).
12. A (-2,-1), B (4,0), C (1,5).
13. A (-1,1), B (2,4), C (2,0).
14. A (0,5), B (2,-4), C (0,-6).
15. A (0,0), B (4,-4), C (4,-3).
16. A (6,-1), B (-5,2), C (0,2).
17. A (-4,10), B (7,10), C (6,9).
18. A (6,5), B (6,4), C (2,10).
19. A (-3,4), B (7,4), C (2,6).
20. A (0,6), B (-2,8), C (7,3).
21. A (8,2), B (2,6), C (4,9).
22. A (1,6), B (-4,0), C (-1,-3).
23. A (-7,2), B (1,5), C (-3,8).
24. A (-1,1), B (4,4), C (-3,5).
25. A (-7,2), B (-4,7), C (-3,1).
26. A (4,-2), B (0,7), C (1,7).
27. A (-3,4), B (1,2), C (-2,-4).
28. A (8,0), B (-7,10), C (6,9).
29. A (3,-5), B (-6,4), C (2,10).
30. A (-6,4), B (5,4), C (2,-5).

IV. Криві 2-го порядку. Привести рівняння кривих 2-го порядку до канонічного вигляду; вказати тип та схематично побудувати криві.

1. а) $9x^2 + 16y^2 – 36x + 32y – 92=0$,

   б) $25x^2 – 16y^2 + 50x + 96y – 519=0$,

   в) $y^2 – 8x + 6y + 49=0$.

2. а) $-9x^2 + 36y^2 + 90x + 72y – 513=0$,

   б) $25x^2 + 4y^2 + 150x – 32y + 189=0$,

   в) $4y^2 + x – 8y + 8=0$.

3. а) $9x^2 + 4y^2 – 54x – 8y – 59=0$,

б) $-25x^2+16y^2+100x+128y-244=0$,

в) $2x^2-20x+y+46=0$.

4. а) $9x^2+25y^2+18x+150y+9=0$,

   б) $36x^2-4y^2-144x-40y-100=0$,

   в) $y^2-8x+10y+1=0$.

5. а) $4x^2+9y^2-40x+54y+145=0$,

   б) $-25x^2+4y^2-200x+8y-496=0$,

   в) $4y^2-x+4y-7=0$.

6. а) $4x^2-9y^2+8x+54y-113=0$,

   б) $25x^2+16y^2-100x+64y-236=0$,

   в) $x^2+2x+4y+12=0$.

7. а) $25x^2-36y^2-50x+288y-1451=0$,

   б) $25x^2+4y^2+150x-40y+255=0$,

   в) $x^2-2x+4y-19=0$.

8. а) $16x^2+36y^2-32x+360y+340=0$,

   б) $-16x^2+25y^2+96x+50y-519=0$,

   в) $2x^2-16x+y+29=0$.

9. а) $4x^2-16y^2+40x+96y-108=0$,

   б) $36x^2+9y^2+288x-90y+477=0$,

   в) $y^2+8x+8y+56=0$.

10. а) $4x^2+49y^2+16x+294y+261=0$,

    б) $-4x^2+49y^2+24x-196y-36=0$,

    в) $4y^2-x-40y+97=0$.

11. а) $9x^2+49y^2-90x-98y-167=0$,

    б) $49x^2-16y^2-196x+32y-604=0$,

    в) $x^2-8x-16y=0$.

12. а) $9x^2+16y^2+72x-96y+144=0$,

    б) $-25x^2+9y^2+50x+18y-241=0$,

    в) $x^2+4x+4y-8=0$.

13. а) $9x^2+16y^2+18x-64y-71=0$,

б) $25x^2 - y^2 + 50x - 75 = 0$,

в) $3x^2 - 18x + 4y + 35 = 0$.

14.а) $9x^2 + 10y^2 + 40y - 50 = 0$,

б) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 24y + 9 = 0$,

в) $5x^2 - 10x - y + 8 = 0$.

15.а) $9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 = 0$,

б) $-16x^2 + 25y^2 + 128x + 150y - 431 = 0$,

в) $x^2 - 6x - 8y + 49 = 0$.

16.а) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$,

б) $9x^2 + 4y^2 + 54x - 40y + 145 = 0$,

в) $16y^2 - x - 96y + 142 = 0$.

17.а) $36x^2 - 9y^2 + 72x + 90y - 513 = 0$,

б) $4x^2 + 25y^2 + 8x - 150y + 129 = 0$,

в) $4x^2 - 8x + y + 8 = 0$.

18.а) $-9x^2 + 4y^2 + 54x + 8y - 113 = 0$,

б) $16x^2 + 25y^2 + 64x - 100y - 236 = 0$,

в) $y^2 + 4x - 8y + 12 = 0$.

19.а) $16x^2 + 25y^2 + 128x + 100y - 244 = 0$,

б) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 54y + 49 = 0$,

в) $2y^2 + x - 20y + 46 = 0$.

20.а) $-4x^2 + 36y^2 + 40x + 144y - 100 = 0$,

б) $25x^2 + 9y^2 + 150x - 18y + 9 = 0$,

в) $2x^2 + 4x - y + 7 = 0$.

V. Площина та пряма у просторі. Для піраміди *ABCD*, що вказана у завданні ІІ з векторної алгебри, записати рівняння прямої (*AD*), площини *ABC* та висоти (*DH*); знайти кут між прямою (*AD*) та площиною *ABC*; знайти проекцію точки *B* на пряму (*AD*).

Список літератури

1. Вища математика в прикладах і задачах. У 2-х томах. Т. 1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посіб. / Л. В. Курпа [та ін.]. – Харків : НТУ “ХПІ”, 2009. – 532 с.

2. Ильин В. А., Линейная алгебра : учебник / Ильин В. А., Позняк Э. Г. – Москва : Наука, 1999. – 280 с.

3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия : учебник / Ильин В. А., Позняк Э. Г. – Москва : Наука, 2004. – 224 с.

4. Боревич З. И. Определители и матрицы / Боревич В. И. – Москва : Наука, 1970. – 191с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для самостійної роботи за темою
«Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії»
з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей
заочної та прискореної форм навчання

Укладачі: ЛІННИК Ганна Борисівна,
МОРАЧКОВСЬКА Ірина Олегівна

Відповідальний за випуск проф. Курпа Л. В.
Роботу до видання рекомендував доц. Руднєва Г. В.

В авторській редакції

План _2019_ р., поз. _162_

Підп. до друку ________. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Цифровий друк. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк._1,86_.
Наклад 50 прим. Зам. № ______. Ціна договірна.

Видавець
Видавничий центр НТУ «ХПІ»,
вул. Кирпичова, 2, м. Харків-2, 61002

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Виготовлювач